Matemàtiques arreu i recursos

Racó històric

Niccolò Tartaglia matemàtic i enginyer del Renaixement

Maria Rosa Massa-Esteve
Universitat Politècnica de Catalunya

El període des de la segona meitat del segle XIV al començament del segle XVII va ser l'època anomenada Renaixement, on va renéixer l'interès per la Grècia i la Roma clàssiques [14]. Artistes, escriptors, científics i, fins i tot, els artesans més refinats buscaven en el passat la inspiració i els exemples on trobar el model per a la seva pròpia obra. El llatí i el grec van esdevenir les claus indispensables per a l'estil, el coneixement i el bon gust, i van prendre un significat fundacional a l'educació que es va retenir durant molts anys.

Va ser el període dels grans viatges de descobriments que van ampliar els horitzons de la civilització occidental, com ho va fer també la invenció de la impremta, que va tenir efectes incalculables en la comunicació dels homes i la difusió del coneixement.

La influència del Renaixement en la tecnologia es va registrar en la pintura i en l'arquitectura. La perspectiva explicada a l'obra *De Pictura* (1436), de Leon Battista Alberti (1404-1472), es va introduir a la pintura mitjançant elements geomètrics (Andersen, 2019). L'abandó de les formes gòtiques per l'arquitecte italià Filippo Brunelleschi (1377-1446) i els seus deixebles, i la gradual difusió de l'estil neoclàssic pal·ladià dels edificis d'Itàlia sobre la resta d'Europa van produir també canvis en les tècniques de construcció, com ara la cúpula de la catedral de Florència (iniciada el 1418).

El Renaixement va incentivar també els artesans artístics (orfebres com Cellini o pintors com Rafael), que van modificar els objectius dels seus oficis.

D'altra banda, es va argumentar que les invencions del món modern mostraven la seva superioritat tecnològica. Així especialment es mostrava en un volum de magnífics gravats produïts a finals del segle XVI, *Nova Reperta* (1570), de Jan Stradanus (1523-1605) (Figura 1). La imatge ens mostra tres grans innovacions: la pólvora, la brúixola i la impremta. Tanmateix, al Renaixement es va produir també un canvi de pensament cada vegada més receptiu a acceptar les novetats tecnològiques.

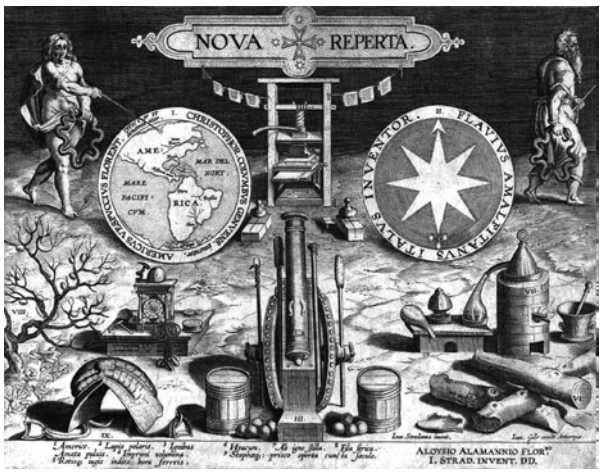

Figura 1. Portada de la *Nova Reperta*

Pel que fa a les matemàtiques, es produeix la normalització dels caràcters numèrics indis. Es comencen a recuperar (directament!) textos grecs i es tradueixen al llatí. A tall d'exemple

podríem citar Frederic Commandino (1506-1575), que tradueix les grans obres clàssiques d'Arquimedes, Ptolemeu, Euclides, Aristarc, etc. L'àlgebra encara no és considerada una part independent dins de les matemàtiques. Tanmateix, és en aquesta època quan s'intenten les primeres classificacions de les equacions, segons el grau i l'ordre, i es presenten les solucions elaborant constantment diagrames i construccions geomètriques que les verifiquin (Rommevaux et al., 2012). Cal remarcar les obres *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita* (1494), de Luca Pacioli (1445-1517); *Artis Magnae, sive de Regulis Algebraicis* (1545), de Girolamo Cardano (1501-1576); *Algebra* (1572), de Rafael Bombelli (1526-1573), entre d'altres.

Dades biogràfiques

Niccolò Fontana, "Tartaglia" (Brescia, 1499/1500 - Venècia, 1557), enginyer i matemàtic del Renaixement, es va formar als tallers italians liderats per científics i artesans, que tenien com a model Arquimedes. La teoria i la pràctica, el coneixement i també la seva aplicació formaven part de l'objectiu del coneixement científic [**?**]. El pare de Tartaglia va morir quan ell només tenia sis anys (Massoti, 1990). Quan tenia dotze anys unes bombes el van ferir a la boca, estant refugiat a la catedral, i això li va produir tartamudesa; d'aquí ve el sobrenom de Tartaglia. Quan es va recuperar, a catorze anys el van portar al Maestro Francesco perquè aprengués les lletres, encara que aviat va haver d'estudiar pel seu compte, tal com ell mateix explica a la seva obra *Quesiti* (1546). Entre 1516 i 1518 va fer de "mestre d'àbac" a Verona i més tard també a una escola del Palazzo Mazzanti. L'any 1534 es va traslladar a Venècia, on va ser professor de matemàtiques a la universitat i, al mateix temps, també va donar conferències a l'església de San Zanipolo, entre d'altres. Quasi totes les seves obres es van publicar a Venècia, on va ser fins que va morir, pobre i sol.

El seu primer llibre va ser el més important: *Nova Scientia* (1537; segona edició, 1558) i l'analitzarem acuradament. Més tard, el 1543 (segona edició, 1565) va publicar una traducció italiana dels *Elements* d'Euclides. En aquell mateix any, Tartaglia va publicar tres llibres d'Arquimedes, i va fer servir una traducció llatina de Willem van Moerbeke del segle XIII sobre els centres de gravetat, la quadratura del cercle i els cossos flotants. L'any 1546 va publicar *Quesiti e inventioni diverse*, que conté nou llibres que tracten d'artilleria, de tirs i efectes, de fortificacions; al nové llibre número explica com va trobar la resolució de l'equació cúbica. Al final de la seva vida, va publicar *The general trattato di numeri e misure* (1555-1560), que és una col·lecció de 204 problemes amb les seves solucions matemàtiques. Tartaglia és molt conegut per la controvèrsia que va tenir amb Cardano respecte a la resolució de la cúbica que analitzarem breument tot seguit.

Figura 2. Nicolo Fontana, Tartaglia
portada de *Quesiti et Inventioni Diverse*, MDLIIII

Sobre la resolució de la cúbica

La resolució de la cúbica al Renaixement va ser un repte per als matemàtics, i Tartaglia va ser un dels que la va resoldre [7]. Un dels primers matemàtics que va intentar trobar una fórmula per a la resolució de l'equació de cúbica va ser Pacioli a la seva obra *Summa* 1494), encara que només va aconseguir resoldre equacions particulars, a vegades sense cap demostració, i va afirmar que no s'havia trobat encara la fórmula general de l'equació de tercer grau [5].

D'aquesta manera, la primera persona que es coneix que va resoldre l'equació cúbica és Scipione del Ferro (1465-1526). Va resoldre l'equació del tipus $x^3 + bx = c$ (amb $b > 0$ i $c > 0$) cap a l'any 1515, però no en va revelar a ningú el procediment de resolució. Quan Ferro s'estava morint, va confiar el secret al seu

alumne Antonio Maria del Fiore, que va començar a presumir de saber resoldre equacions de tercer grau i el 1535 va desafiar Tartaglia, que estudiava en la mateixa època les equacions de tercer grau. El desafiament consistia que cada participant havia de dipositar una certa suma de diners davant de notari i proposar trenta problemes perquè els resolgués el seu oponent. El que en un termini de trenta dies hagués resolt més problemes s'enduria tots els diners.

Ja que no es treballava amb els nombres negatius, hi havia dos tipus d'equacions sense terme quadràtic: *cubus et res aequalia numeris i cubus aequalia res et numeris* ($x^3 + bx = c$ i $x^3 = bx + c$, amb $b > 0$ i $c > 0$). Es creu que Ferro hauria ensenyat a Fiore a resoldre només un dels casos. En aquest desafiament, Tartaglia va guanyar, i el 13 de febrer de 1535 va demostrar que sabia resoldre ambdós casos, tot i que no en va explicar el procediment.

Cardano, que era professor de matemàtiques a Milà, estava al corrent dels esdeveniments relacionats amb les cúbiques i va intentar que Tartaglia li confiés la fórmula. De fet, li va prometre que el recomanaria al governador de Milà, Alfonso d'Avalos (1502-1546). El març del 1539, Tartaglia va deixar Venècia per anar-se'n a Milà i, després de persuadir Cardano perquè mantingués en secret els mètodes de resolució, mitjançant un solemne jurament, li va confiar el secret en forma de poema.

Més tard, com va explicar Ludovico Ferrari (1522-1565), deixeble de Cardano, tots dos van viatjar a Bolonya a la recerca d'Antonio della Nave, gendre de Ferro, que els va mostrar el manuscrit on apareixia la resolució de l'equació cúbica del 1515. Cardano ja no es va sentir tan obligat pel jurament i va publicar el procés de resolució de l'equació cúbica al seu llibre *Artis Magnae, sive de Regulis Algebraicis* (1545). Cardano explica al començament del capítol XI d'aquesta obra que reconeixia l'autoria de Ferro, de Fiore i de Tartaglia d'alguns casos de la resolució de la cúbica, però que ell havia donat la solució de tots els tipus i la demostració geomètrica amb cubs [3].

Aquesta publicació de Cardano va provocar que Tartaglia publiqués en *Quesiti* (1546) tot un llibre (el novè) per explicar la seva versió de la història. Hi deia que Cardano havia actuat amb mala fe. De fet, actualment s'anomena la cúbica de Cardano-Tartaglia.

Les matemàtiques a la *Nova Scientia*

Nova Scientia va ser l'obra més influent de Tartaglia. En aquesta obra del 1537, Tartaglia va voler introduir una nova ciència: la balística. En el frontispici d'aquesta obra, Tartaglia presenta una imatge que ens mostra les seves noves idees sobre la ciència. Així, sembla que reprèn la idea platònica segons la qual la matemàtica constituiria l'entrada a la ciència i a la filosofia. La imatge representa dues fortaleses: una està situada a dalt de tot de la muntanya, la filosofia flanquejada per Plató i Aristòtil; a l'altra, situada a la part més baixa, hi ha representat el *quadrivium*: música, aritmètica, geometria i astronomia i, a més, perspectiva. Tartaglia és al centre, com a mestre de cerimònies, i presenta els principis de la nova ciència que constitueix la balística, un canó disparant una bala i la seva trajectòria curvilínia. Per entrar en aquest sancta santorum del coneixement s'ha de travessar la porta guardada per Euclides. Els *Elements* d'Euclides en el *Cinquecento* van ser no només els fonaments de la ciència, sinó el paradigma o la manera d'arribar al coneixement; és a dir, tenien una funció propedèutica.

Figura 3. Imatge del frontispici

En el segle XVI, les disciplines matemàtiques van començar a incloure un nou ventall de coneixements, probablement com a resultat de l'expansió de les descobertes científiques i dels avenços tecnològics, a través dels quals s'aplicaven progressivament els principis de l'aritmètica i de la geometria [12], [10].

És per aquests motius que en les obres del segle XVI que tracten de matemàtiques inevitablement es parla també de la qüestió del nombre de disciplines matemàtiques i de la seva classificació. Així, Tartaglia, en el prefaci de la seva traducció a l'italià (1565) dels *Elements* d'Euclides, explica i analitza les diferents classificacions de les matemàtiques. Descriu les que ell anomena "vulgars", que són les més conegudes, que inclouen aritmètica, geometria, música, astronomia, astrologia, cosmografia, geografia, corografia, perspectiva, òptica, ciència dels pesos, arquitectura i moltes d'altres. També reconeix com a usual el *quadrivium*, format per l'aritmètica, la geometria, la música i l'astronomia. Tot seguit, cita Pacioli, que en la seva classificació modifica el *quadrivium* i hi afegeix la perspectiva, i estableix que, en conseqüència, les matemàtiques haurien de consistir en cinc parts, o en tres, si la música se n'apartés. Tartaglia també cita la classificació de Pierre d'Aylli, que conclou que la música, l'astronomia i la perspectiva pertanyen a la matemàtica "mixta". Aquesta matemàtica començava a incorporar aquelles disciplines en les quals la quantitat era tractada amb relació a la natura, en contrast amb la matemàtica pura, que tractava la quantitat independentment de la natura. I Tartaglia, al prefaci, conclou que "únicament l'aritmètica i la geometria són les matemàtiques pures, i totes les altres són *medie* (mitjanes), o bé dependents i mixtes de les altres disciplines matemàtiques" [15].

El contingut de la *Nova Scientia*

El llibre de Tartaglia no és un tractat del moviment en sentit medieval, o sigui, no discuteix la naturalesa del moviment [17]. Quan diu que s'ocuparà d'estudiar el moviment d'un projectil disparat per un canó es refereix a qualsevol "màquina artificial o matèria que sigui apta per llançar un cos igualment greu violentament per l'aire" (definició XIII; [16]).

En aquesta obra, Tartaglia intentava determinar la forma que adopta la trajectòria d'una bala de canó. El problema principal en l'anàlisi del moviment d'una bala de canó era que en aquell moment encara hi havia idees confuses sobre què passava una vegada que la bala estava en l'aire. Les preguntes que es feien eren:

Quants graus s'ha d'aixecar un canó sobre l'horitzó a fi que la bala encerti sobre un blanc col·locat a una determinada distància?

Amb quina inclinació s'ha de disparar una bala a fi que la distància abastada sigui la màxima?

Les primeres respostes van venir dels claustres universitaris i les va emetre Tartaglia, que era professor de Matemàtiques a la Universitat de Venècia. Afirmava que la màxima distància pel disparament d'una bala s'aconsegueix inclinant el canó 45º sobre l'horitzontal i, a més, va donar una altra resposta que va sorprendre encara més. Tartaglia explicava que la trajectòria que seguia la bala a l'aire incloïa una part corba, en contradicció amb la doctrina aristotèlica d'aquest moviment, on no hi havia moviment curvilini (Figura 4).

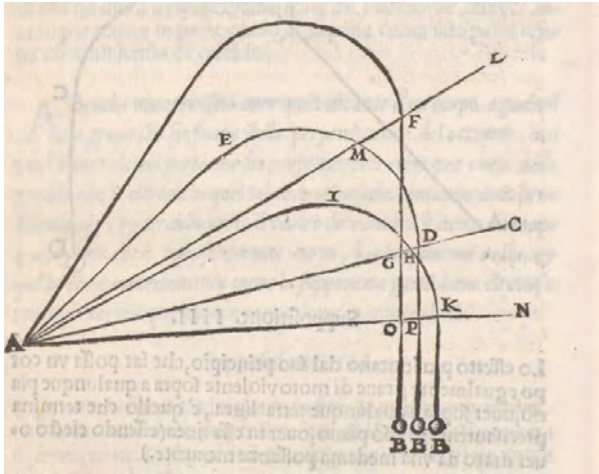

Figura 4. Moviment de la bala de canó [16]

La *Nova Scientia* està formada per tres llibres. El primer conté 14 definicions, 5 suposicions, 4 sentències comunes i 6 proposicions amb alguns corol·laris. El segon llibre conté 14 definicions, 4 suposicions i 9 proposicions amb alguns corol·laris i el tercer llibre conté 5 definicions i 12 proposicions. Tartaglia presenta la seva nova ciència amb una estructura totalment

euclidiana a fi que pugui ésser acceptada com a nova part de la matemàtica [4].

En les proposicions del llibre primer Tartaglia estableix els seus resultats i els mostra:

> "Tot cos igualment greu amb moviment natural, com més es vagi allunyant del seu principi i aproximant a la seva fi, tant més de pressa anirà." [16]

A la quarta suposició del llibre segon reflexiona sobre la inclinació del canó per obtenir la màxima distància (Figura 4). I finalment, a la proposició VIII d'aquest mateix llibre (Figura 5) demostra que la inclinació del canó ha de ser de 45º emprant geometria, amb triangles semblants (teorema de Tales).

> "Si una mateixa potència mobilitzadora projectés o llancés violentament a l'aire cossos igualment greus, similars i iguals, el que faci el seu trànsit a 45º sobre l'horitzó produirà també un efecte més llunyà, (mesurat) des del seu inici sobre el pla de l'horitzó." [16]

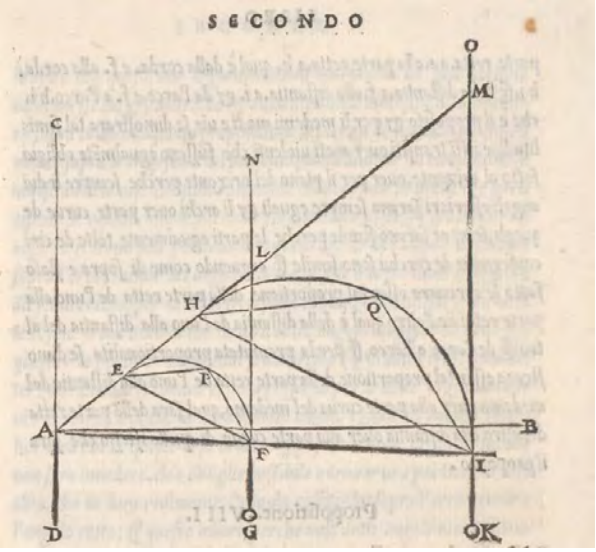

Figura 5. Imatge de la proposició VIII. [16]

Els instruments matemàtics

Tartaglia, a la *Nova Scientia*, construeix dos quadrants d'artiller per mesurar. Un el descriu a la carta dedicatòria posant-lo a la boca del canó (Figura 6).

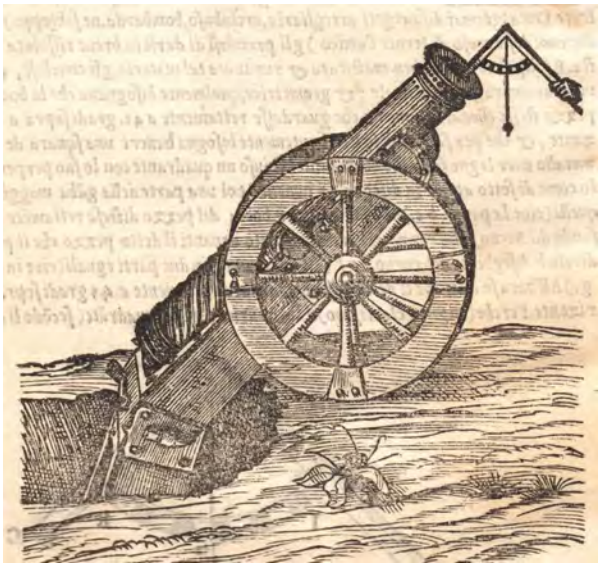

Figura 6. Primer quadrant a la carta dedicatòria [16]

L'altre instrument l'empra per resoldre la mesura de l'alçada d'un objecte visible, però inaccessible, i el descriu acuradament al tercer llibre (Figura 7). En aquest llibre descriu els materials necessaris per construir un quadrant d'artiller des de la primera proposició fins a la quarta: el regle, l'escaire, la plomada i la comprovació dels angles a les primeres sis proposicions.

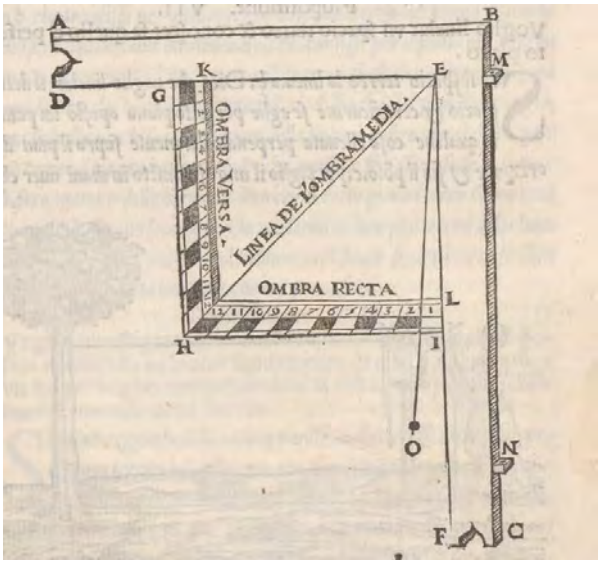

Figura 7. Segon quadrant explicat al llibre tercer [16]

A la proposició VIII del llibre tercer Tartaglia demostra amb aquest instrument com obtenir l'alçada d'un objecte visible però inaccessible, i afirma [9]:

> "Desitjo investigar l'alçada d'una cosa visible, a la qual un es pot acostar al nivell de la base, i al mateix temps desitjo conèixer la distància al llarg de la hipotenusa o diàmetre de l'altura." [16]

La imatge d'aquesta proposició clarifica el raonament geomètric (Figura 8):

Figura 8. Imatge del problema de la proposició VIII. [16]

L'obra de Tartaglia va tenir un èxit considerable. El 1583, el text en italià havia arribat a les set edicions i havia estat traduït a moltes llengües. Tartaglia, coneixedor de la problemàtica, va continuar amb el problema del moviment, més tard, en la seva obra *Quesiti* (1546).

Reflexions finals

En el Renaixement, els desenvolupaments en els dominis militars i artístics, i també en els instruments científics, van fer que les disciplines matemàtiques es consideressin cada cop més una eina universal per resoldre problemes. Així, un bon exemple de matematització d'un fenomen natural són les proposicions del llibre tercer de la *Nova Scientia* de Tartaglia.

A més, cal afegir que la implementació a les aules d'aquestes proposicions com a part d'una activitat històrica permet construir amb l'alumnat l'instrument que empra Tartaglia i calcular la distància amb la geometria de triangles semblants [8],[9]. Seguint les idees de Hacking [6], "representar i intervenir", reproduir aquest raonament amb instruments, permetrà també introduir el coneixement, en aquest cas la trigonometria, més fàcilment i amb un camí més entenedor.

L'assoliment principal de Tartaglia va ser haver demostrat que una ciència exacta de la balística era possible, basada en l'aplicació de mètodes matemàtics [18]. Es pot concloure que Tartaglia va ser un matemàtic-enginyer del Renaixement. Matemàtic pel seu ús de la geometria a la balística i també perquè va presentar un procediment per resoldre l'equació de tercer grau, i enginyer per la introducció de la balística, per les seves invencions i instruments. Tartaglia encarna la imatge de l'enginyer matemàtic que apareix a la Itàlia del Cinquecento i que té com a raó de ser resoldre els problemes de la seva professió i cultivar l'art d'inventar.

Referències

[1] K. Andersen. *Optical illusions in Rome. A mathematical travel guide.* V. Blasjö (trad.). Providence, MAA Press(2019).

[2] J. Bennet; S. Johnston. *The geometry of war 1500-1750* Oxford: Museum of the History of Science (1996).

[3] G. Cardano. *Ars Magna or the rules of Algebra.* T.R. Witmer (trad.). Nova York: Dover (1968).

[4] K. J. Ekholm. "Tartaglia's ragioni: A maestro d'abaco's mixed approach to the bombardiers's problem". *British Journal for the History of Science* 43(2) (2010) 181–207.

[5] V. Gavagna. "L'Ars magna arithmeticae nel corpus matematico di Cardano". A S. Rommevaux; M. Spiesser; M. R. Massa-Esteve (dir.). *Pluralité de l'algèbre a la Renaissance.* París: Honoré Champions Editeur (2012).

[6] I. Hacking. *Representing and invervenint.* Cambridge University Press (1983).

[7] S. Kichenassamy.. "Continued proportions and Tartaglia's solution of cubic equations". Historia Mathematica 42 (2015), 407—435.

[8] M. R. Massa-Esteve. "Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica". Biaix 21 (2003), 4–9.

[9] M. R. Massa-Esteve. "Historical activities in the mathematics classroom: Tartaglia's

Nova Scientia". *Teaching innovations 27* (3) (2014), 114–126.

[10] M. R. Massa-Esteve; A. Roca-Rosell; C. Puig-Pla. "Mixed Mathematics in engineering education in Spain: Pedro Lucuce's course at the Barcelona Royal Military Academy of Mathematics in the eighteenth century". *Engineering studies* (3) (2011), 233–253.

[11] A. Massoti. "Niccolò Tartaglia". C. C. Gillispie (ed.). *Dictionary of scientific biography.* Nova York: Scribner's 13 (1971–1991), 258–262.

[12] L. Roberts; S. Schaffer; P. Dear (ed.). *The mindful hand: Inquiry and invention from the late Renaissance to early industrialisation.* Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (2007).

[13] S. Rommevaux; M. Spiesser; M. R. Massa-Esteve (dir.). *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance.* París: Honoré Champions Editeur (2012).

[14] P. L. Rose. *The Italian Renaissance of Mathematics: Studies on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo.* Ginebra: Libraire Droz (1975).

[15] N. Tartaglia. *Euclide Megarense Philosopho, solo introduttore delle Scientie Mathematice. Diligentemente rassettato, et alla integrità ridotto, per il degno professore di tal Scientie Nicolo Tartalea Brisciano secondo le due tradottioni.* Venetia: Apresso Curtio Troiano (1565).

[16] N. Tartaglia. *Nova Scientia*, (1537).

[17] N. Tartaglia. *La Nueva Ciencia (R. Martínez i C. Guevara, trad.).* Col·lecció MATHEMA. Ciutat de Mèxic: Facultat de Ciències, UNAM (1998).

[18] M. Valleriani. *Metallurgy, Ballistics and epistemic instruments. The Nova Scientia of Niccolò Tartaglia. A new edition.* Max Planck Research Library for the History and Development of Knowledge. Sources 6. Berlín: Edition Open Access (2013).

Bits de matemàtiques

Mani'm?

Laura Brustenga i Moncusí, UCPH
Martí Prats i Soler, UB

El "Bits" de la *SCM/Notícies* 49, el vam dedicar a fer un repàs de continguts divulgatius en línia.

El "Bits" d'aquest número té com a objectiu exposar una eina útil per a la divulgació. Es tracta d'un programa de creació de vídeos matemàtics anomenat Manim. Quin nom més apropiat per a un llenguatge de programació! És com si ens demanés a crits que comencem a fer divulgació matemàtica en línia en català, no us sembla?

Com sempre, animem els lectors a fer-nos arribar propostes per poder-les disseccionar en aquest apartat. Envieu-les a: brust@mat.uab.cat.

Manim (acrònim de Mathematical Animation Engine) és un motor Python per programar animacions precises, especialment dissenyat per a vídeos de matemàtiques. Va ser creat per Grant Sanderson per a les animacions del seu canal de divulgació @3blue1brown. Actualment n'hi ha dues versions: ManimGL[8], mantinguda pel creador original, i la versió comunitària, Manim[9]. En aquest article parlarem de la versió comunitària, recomanada per a la creació de continguts. Es pot provar el programa en línia a través d'uns fulls Jupyter[10]. De tota manera, la instal·lació és prou senzilla si estem familiaritzats amb el llenguatge Python; només cal seguir les instruccions de la pàgina de Manim.

[8] https://github.com/3b1b/manim
[9] https://github.com/ManimCommunity/manim/
[10] https://try.manim.community/